

Enveis variansanalyse (One-way ANOVA, fixed effects model)

Rekapitulering av t -testen for uavhengige utvalg fra to grupper, G_1 og G_2 :

Observasjoner fra G_1 : $Y_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $j=1,2,\dots,n_1$

Observasjoner fra G_2 : $Y_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $j=1,2,\dots,n_2$

Estimatoren for forventningene: $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} Y_{1j} = \bar{Y}_1$ og $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_{2j} = \bar{Y}_2$

Tester hypotesen $H_0: \mu_1 = \mu_2$ mot $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$. Forutsatt at variansen er den samme i begge grupper, fås under H_0 testobservatoren

$$T = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Dvs. t -fordelt med $n_1 + n_2 - 2$ frihetsgrader. s er estimert felles standardavvik. H_0 forkastes dersom

$$|T| > t_{n_1 + n_2 - 2, 1 - \alpha/2}$$

I tilfelle H_0 forkastes, er konklusjonen enten $\mu_1 > \mu_2$ eller $\mu_1 < \mu_2$, avhengig av størrelsen på de tilhørende estimatene $\hat{\mu}_1$ og $\hat{\mu}_2$. Altså entydig konklusjon.

1

Flere enn to grupper

En generalisering av to-utvalgstesten ovenfor. Anta uavhengige utvalg fra k grupper, $G_1 \dots G_k$, hver med n_i uavhengige og normalfordelte observasjoner med konstant varians σ^2 , og $i=1,2,\dots,k$.

Observasjoner fra G_1 : $Y_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $j=1,2,\dots,n_1$

Observasjoner fra G_2 : $Y_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $j=1,2,\dots,n_2$

.....

Observasjoner fra G_k : $Y_{kj} \sim N(\mu_k, \sigma^2)$, $j=1,2,\dots,n_k$

Tester $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$. Alternativet til H_0 rommer en rekke muligheter. Dersom f.eks. $k=3$, kan alle forventningene være forskjellige, eller så er to like og den tredje forskjellig fra de to osv.. Generelt uttrykt er testen:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \\ \text{mot } H_1: \mu_i \neq \mu_j, i \neq j \text{ for minst ett par } \mu_i, \mu_j. \end{aligned}$$

I tilfelle forkastning av H_0 , blir det neste å finne ut hva avviket fra H_0 består av. Dette skal vi komme tilbake til senere.

2

Enveis ANOVA, modell

Vi har følgende modell:

$$Y_{ij} = \mu_i + e = \mu + \alpha_i + e$$

Y_{ij} er j -te observasjon i utvalg fra gruppe i

μ_i er forventningen i gruppe i

μ er forventningen til alle Y_{ij} -ene samlet sett, "grand mean".

α_i er avviket i i -te gruppes forventning fra "grand mean" μ .

Hver enkelt observasjon består av en konstant μ , et gruppespesifikt tillegg (eller fradrag) α_i og et stokastisk tillegg (fradrag) e .

e -ene antas normalfordelte og uavhengige med forventning null og varians σ^2 .

Dette medfører

$$E(Y_{ij}) = \mu_i = \mu + \alpha_i \text{ og at}$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \text{ er ekvivalent med}$$

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Alternativene blir $H_1: \alpha_i \neq 0$ for minst én i .

3

Notasjoner, gjennomsnitt og kvadratsummer

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \text{ gjennomsnittet av alle observasjonene i utvalg fra gruppe } i$$

$$N = \sum_{i=1}^k n_i, \text{ totalt antall observasjoner}$$

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \text{ gjennomsnittet av alle observasjonene}$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{\bar{Y}})^2, \text{ "Total Sums of Squares", (Total SS} \equiv \text{SS}_{\text{Tot}})$$

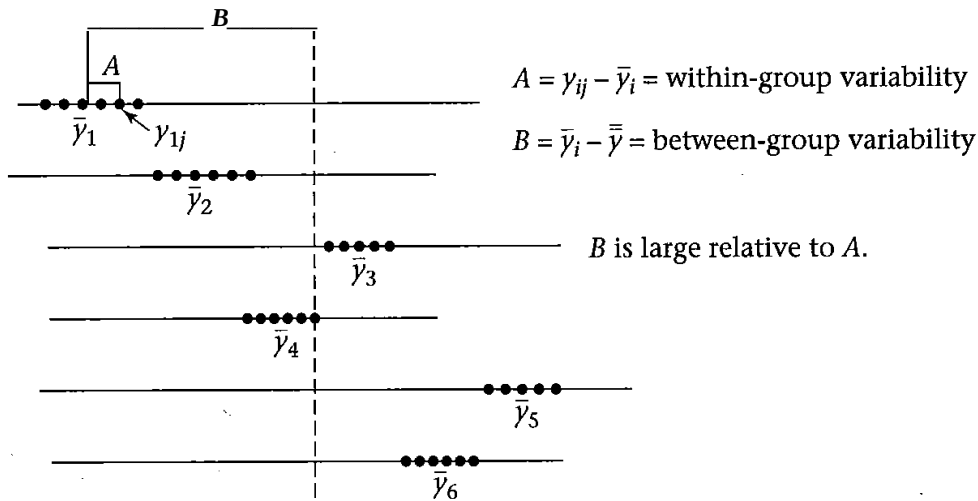
$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2, \text{ "Within Sums of Squares", (Within SS} \equiv \text{SS}_{\text{Within}} \equiv \text{SS}_E)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2, \text{ "Between Sums of Squares", (Between SS} \equiv \text{SS}_{\text{Between}})$$

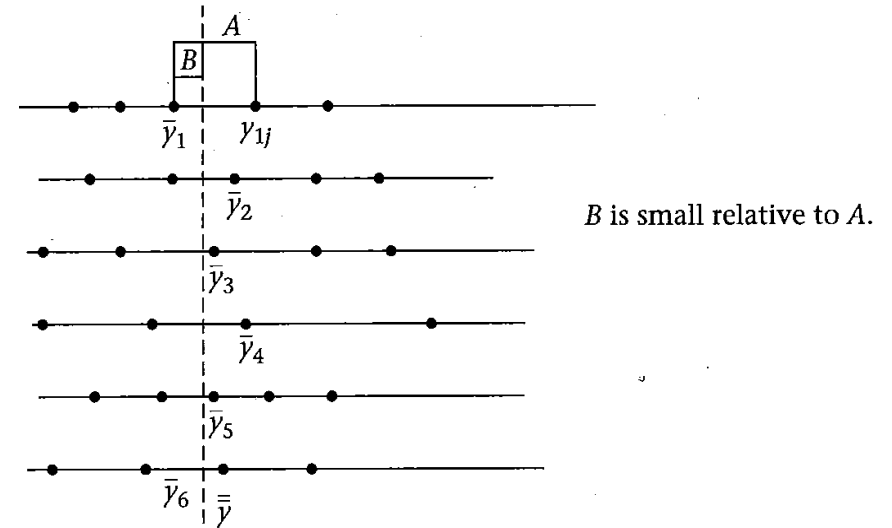
Det kan vises at **Total SS = Within SS + Between SS**

4

Variabilitet



5



6

ANOVA-tabellen

Kilde til variasjon	Kvadratsum (SS)	df	$MS = \frac{SS}{df}$	F	p
Between (grupper imellom)	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2$	k-1	Between MS = $\frac{\text{Between SS}}{k-1}$	$F_0 = \frac{\text{Between MS}}{\text{Within MS}}$	
Within (innen grupper, residual)	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	N-k	Within MS = $\frac{\text{Within SS}}{N-k}$		
Total	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{\bar{Y}})^2$	N-1			

Det kan vises at *Within MS* er en konsistent estimator for σ^2 (variansen til støyleddene) og dermed til Y . En av forutsetningen i ANOVA-modellen var at variansen var lik i alle grupper. De fleste programpakker har test for dette.

7

F-test av forventningene

Under $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ har vi at

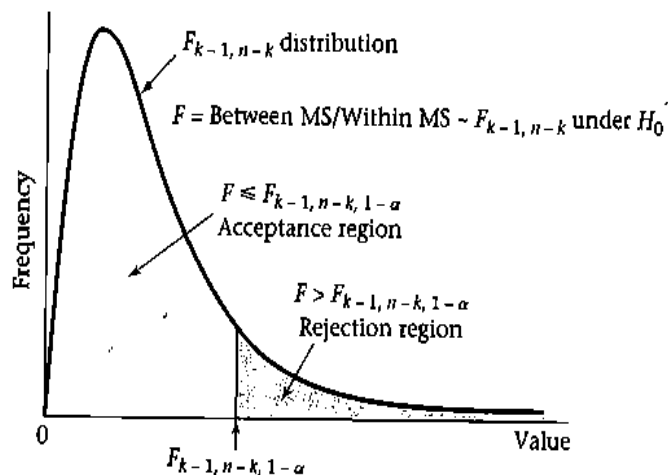
$$F_0 = \frac{\text{Between MS}}{\text{Within MS}} \sim F(k-1, N-k)$$

dvs F-fordelt med $(k-1, N-k)$ frihetsgrader. Jo større *Between MS* er i forhold til *Within MS*, desto større blir F_0 og dermed sannsynlighet for at H_0 forkastes. Dersom observert $F_0 > F_{k-1, N-k, 1-\alpha}$, forkastes H_0 , og vi konkluderer at minst i ett par $(\mu_i, \mu_{i'})$ er forventningene forskjellige, eller ekvivalent minst én $\alpha_i \neq 0$. Noe utover det kan vi foreløpig ikke uttale oss om.

F-testen er m.a.o. *global* i den forstand at den ikke sier noe om hva en eventuell ulikhet mellom forventningene består i.

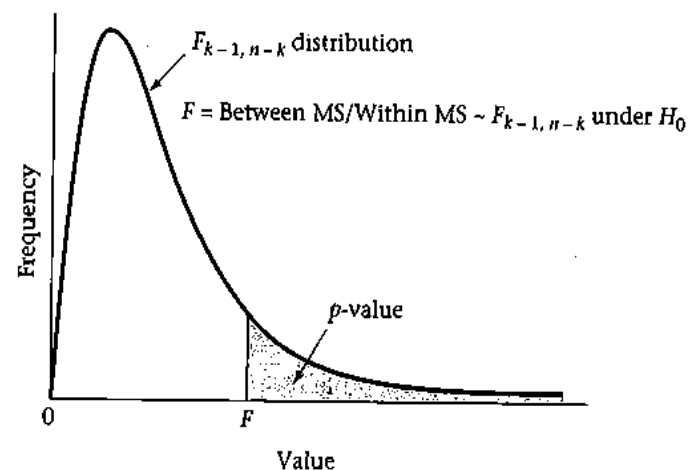
8

Acceptance and rejection regions for the overall F test for one-way ANOVA



9

Computation of the exact p -value for the overall F test for one-way ANOVA



10

Eksempel

Teste ut 3 ulike tilsetninger (hemmere) i en kjemisk prosess der utbyttet er Y .

Primært spørsmål: Har noen av hemmerne effekt på utbyttet?

Sekundært spørsmål: I tilfelle effekt, hvilken, evt. hvilke hemmere har effekt, og hvilken har størst effekt?

Design: Balansert design, 4 serier á 10 prøver. Én serie uten hemmer (Serie 1), de 3 andre serier (Serie 2,3,4) med hver sin type hemmer.

Dette er et planlagt forsøk der vi har kontroll over eksperimentelle betingelser.

Merk at allerede før innsamling av dataene har vi en plan for hvordan de skal analyseres!

11

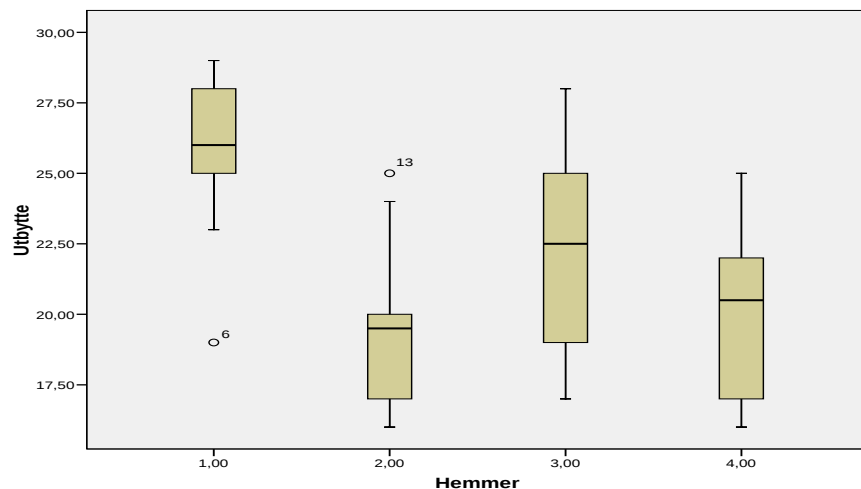
"Summary statistics"

Utbytte

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
1,00	10	25,9000	3,07137	,97125	23,7029	28,0971	19,00	29,00
2,00	10	19,6000	2,95146	,93333	17,4887	21,7113	16,00	25,00
3,00	10	22,2000	3,48967	1,10353	19,7036	24,6964	17,00	28,00
4,00	10	20,0000	2,94392	,93095	17,8940	22,1060	16,00	25,00
Total	40	21,9250	3,92486	,62057	20,6698	23,1802	16,00	29,00

12

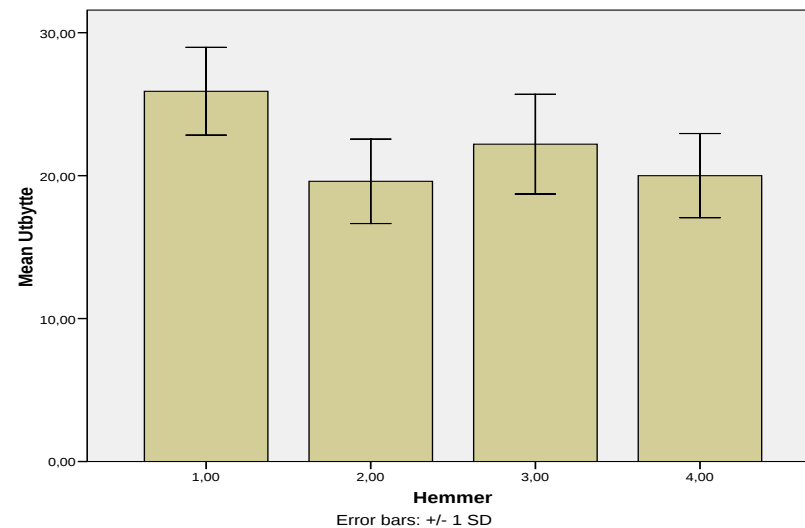
Box-plott



Utliggere?

13

Søylediagram



14

ANOVA-tabell

Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	249,875	3	83,292	8,545	,000
Within Groups	350,900	36	9,747		
Total	600,775	39			

Test for homogen varians

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
,509	3	36	,679

15

Dependent Variable: Utbytte

	(I) Hemmer	(J) Hemmer	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Upper Bound	Lower Bound
LSD	1,00	2,00	6,30000(*)	1,39623	,000	3,4683	9,1317
		3,00	3,70000(*)	1,39623	,012	,8683	6,5317
		4,00	5,90000(*)	1,39623	,000	3,0683	8,7317
	2,00	1,00	-6,30000(*)	1,39623	,000	-9,1317	-3,4683
		3,00	-2,60000	1,39623	,071	-5,4317	,2317
		4,00	-,40000	1,39623	,776	-3,2317	2,4317
	3,00	1,00	-3,70000(*)	1,39623	,012	-6,5317	-,8683
		2,00	2,60000	1,39623	,071	-,2317	5,4317
		4,00	2,20000	1,39623	,124	-,6317	5,0317
	4,00	1,00	-5,90000(*)	1,39623	,000	-8,7317	-3,0683
		2,00	-,40000	1,39623	,776	-2,4317	3,2317
		3,00	-2,20000	1,39623	,124	-5,0317	,6317
Dunnett t (2-sided)	2,00	1,00	-6,30000(*)	1,39623	,000	-9,7237	-2,8763
	3,00	1,00	-3,70000(*)	1,39623	,032	-7,1237	-,2763
	4,00	1,00	-5,90000(*)	1,39623	,000	-9,3237	-2,4763

Merk: $SD(\Delta) = \sqrt{MS_{within}(1/n_1 + 1/n_2)} = \sqrt{9,747(1/10 + 1/10)} = 1,39623$

16

Foreløpige konklusjoner

Alle tre hemmere har *statistisk* signifikant effekt

Hemmer 2 og 4 synes likeverdige og ser ut til å ha større effekt enn hemmer 3, men er denne forskjellen statistisk signifikant?

Undersøker med en mer konservativ test

17

Ikke-planlagte sammenlikninger

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Utbytte

Tukey HSD

(I) Hemmer	(J) Hemmer	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Upper Bound	Lower Bound
1,00	2,00	6,30000(*)	1,39623	,000	2,5396	10,0604
	3,00	3,70000	1,39623	,055	-,0604	7,4604
	4,00	5,90000(*)	1,39623	,001	2,1396	9,6604
2,00	1,00	-6,30000(*)	1,39623	,000	-10,0604	-2,5396
	3,00	-2,60000	1,39623	,262	-6,3604	1,1604
	4,00	-,40000	1,39623	,992	-4,1604	3,3604
3,00	1,00	-3,70000	1,39623	,055	-7,4604	,0604
	2,00	2,60000	1,39623	,262	-1,1604	6,3604
	4,00	2,20000	1,39623	,405	-1,5604	5,9604
4,00	1,00	-5,90000(*)	1,39623	,001	-9,6604	-2,1396
	2,00	-,40000	1,39623	,992	-3,3604	4,1604
	3,00	-2,20000	1,39623	,405	-5,9604	1,5604

* The mean difference is significant at the .05 level.

18

Homogeneous Subsets

Tukey HSD

Hemmer	N	Subset for alpha = .05	
		2	1
2,00	10	19,6000	22,2000 25,9000
4,00	10	20,0000	
3,00	10	22,2000	
1,00	10		
Sig.		,262	,055

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a Uses Harmonic Mean Sample Size = 10,000.

Grupper som oppttrer i samme undergruppe (subset) er ikke signifikant forskjellige.

19

Testing ved hjelp av kontrast

$$H_0 : \mu_3 = \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

Contrast Coefficients

Contrast	Hemmer			
	1,00	2,00	3,00	4,00
1	0	,5	-1	,5

Contrast Tests

		Contrast	Value of Contrast	Std. Error	t	df	Sig. (2-tailed)
Utbytte	Assume equal variances	1	-2,4000	1,20917	-1,985	36	0,055
	Does not assume equal variances	1	-2,4000	1,28539	-1,867	15,576	0,081

20

Endelig konklusjon

Kan ikke konkludere entydig om gruppe 3 versus 2 og 4.

Den ligger i en gråsoner mellom det å høre til kontrollgruppen 1 og det å høre til de to gruppene som med god margin er forskjellige fra kontrollgruppen.

Hemmer 2 og 4 har begge statistisk signifikant effekt på utbyttet.
Ikke grunnlag til å hevde at de har ulik effekt på utbyttet.